

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Гриднев Дмитрий Константинович

Пороговые явления в квантовой механике

01.04.16 – Физика атомного ядра и элементарных частиц

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2013

Работа выполнена в *Санкт-Петербургском Государственном
Университете.*

Официальные оппоненты:

*доктор физико-математических наук, профессор научно-исследовательско-
го института ядерной физики МГУ Блохинцев Леонид Дмитриевич*

*доктор физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургского го-
сударственного университета телекоммуникаций*

и.м. проф. М.А.Бонч-Бруевича Савушкин Лев Николаевич

*доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой вычисли-
тельной физики Санк-Петербургского Государственного Университета
Яковлев Сергей Леонидович*

Ведущая организация:

*НИЦ Курчатовский Институт, ФГБУ Петербургский Институт Ядерной
Физики и.м. Б. П. Константинова*

Защита состоится «_____» _____ 2013 г. в _____ часов на заседании дис-
сертационного совета Д 212.232.16 при *Санкт-Петербургском Государствен-
ном Университете*, по адресу: *199004, Россия, Санкт-Петербург, Средний
Проспект В. О., д. 41/43 мультимедийная ауд. 304*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *СПбГУ*.

Автореферат разослан «_____» _____ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Власников А. К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена анализу пороговых явлений, возникающих в задачах, описываемых квантовой механикой. Термин “пороговый” в настоящем контексте означает, что речь идет об описываемом уравнением Шредингера связанном состоянии частиц, энергия которого близка к границе сплошного спектра, за которой возможен развал системы. Подобные состояния возникают в широком круге проблем квантовой теории. В ядерной физике, в частности, речь может идти о том, какие комбинации протонов и нейтронов создают стабильное ядро. В атомной и молекулярной физике — какие комбинации заряженных частиц разного сорта могут создавать стабильные молекулы и экзотические ионы. Всякий раз, при приближении к границам стабильности в подобных задачах, будут возникать слабосвязанные состояния с энергией близкой к порогу диссоциации (развала). Помимо вопроса о стабильных комбинациях частиц также немаловажно знать, как ведут себя волновые функции молекул, атомов, ядер, когда они описывают слабосвязанный объект.

Обнаружение в 1985 году И. Танихата стабильных ядер открыло новую главу в ядерной физике. Выяснилось, что данные слабосвязанные ядра обладают очень большой пространственной протяженностью нуклонной плотности, сравнимой с ^{208}Pb , который содержит в 34 раза больше нуклонов. Дальнейшие современные исследования показали, что можно ожидать множество подобных ядер вблизи границы стабильности. Исследование границ стабильности и поведение волновых функций вблизи них является современной и исключительно важной фундаментальной проблемой.

Проблема стабильности частиц, взаимодействующих посредством кулоновских сил, является непростой даже в случае, когда число частиц равно трем или четырем. Вариационные методы, как известно, могут лишь точно

предсказать стабильность, но иногда весьма трудно с уверенностью судить о возникающей нестабильности, поскольку любое увеличение числа базисных функций делает уровень энергии ниже. Ситуация усугубляется тем, что зачастую возле порога волновые функции растекаются в пространстве. Поясним это на примере. Для случая частиц с зарядами $\{+1, -1, -1\}$ стабильность зависит исключительно от соотношения масс в системе и можно построить так называемую диаграмму стабильности¹, где стабильные системы ограничены кривой стабильности. Около этой кривой энергия отделения одной из частиц стремится к нулю, при этом волновая функция “размазывается” по всему пространству вблизи порога, и в таких случаях вариационные подсчеты носят очень приближенный характер. В наши дни в лабораториях производится большой набор разных заряженных частиц, из которых строятся экзотические молекулы и атомы. Данные объекты могут иметь теоретическое и прикладное значение. Для построения таких систем понимание принципов стабильности является критическим.

При этом самым надежным является аналитический подход, основанный на математически строгих построениях. Помимо точности получаемых результатов, такой подход позволяет лучше понять механизм образования и распада экзотических молекул. Среди доказательств нестабильности систем из трех зарядов наиболее простым и наглядным представляется доказательство Тирринга², которое является математически строгим и не требует численных расчетов. Тирринг рассматривал экзотический отрицательный ион водорода, в котором масса ядра принималась равной бесконечности. Тирринг показал, что отрицательный ион будет нестабильным, если к атому водорода присоединить отрицательную частицу массой в π раз больше электрона. Более поздний анализ¹ показывает, что константу π можно заменить меньшей

¹ A. Martin, J.M. Richard and T.T. Wu// Phys. Rev. **A46**, 3697 (1992)

² W. Thirring, *Lehrbuch der Mathematischen Physik*, Springer-Verlag/Wien 1994, vol. 3

константой 1.57.

Стабильность четырех-частичных кулоновских систем $m_1^+ m_2^+ m_3^- m_4^-$ исследовалась во многих работах³⁴, как численно, так и с использованием строгих аналитических методов (m^\pm означает частицу массы m с зарядом $\pm e$ соответственно, где e заряд электрона). Под стабильностью здесь понимается существование связанного состояния, лежащего ниже всех порогов диссоциации. Помимо традиционных для молекулярной физики протонов и электронов можно использовать самые разные частицы, такие как мюоны, каоны, дейтроны, а также разные античастицы. На сегодняшний день можно таким образом говорить о потенциально возможных 406 различных комбинациях. В наше время наблюдается повышенный интерес к производству в лабораториях антиматерии. Важным начальным шагом на пути таких исследований стало создание атома антиводорода⁵, состоящего из антипротона (\bar{p}) и позитрона (e^+). Совсем недавно ученые обнаружили антигелий, состоящий из двух антипротонов и двух позитронов⁶. Успехи эксперимента заставляют еще раз обратить внимание на взаимодействие материи и антиматерии. Зная, что существует молекула водорода (ее стабильность была строго математически доказана в⁷), естественно задаться вопросом о существовании молекул водород-антиводород $H-\bar{H}$ (отрицательный ответ на этот вопрос получен в диссертации).

В ядерной физике один из главных вопросов — какие комбинации нейтронов и протонов могут создать стабильное ядро. Если построить карту известных на сегодняшний день ядер⁸, откладывая по оси X число нейтронов, а по оси Y число протонов, то значительное число стабильных изотопов

³ D. Bressanini, M. Mella and G. Morosi // Phys. Rev. A **55**, 200 (1997);

⁴ Т.К. Ребане // Ядерная Физика, **75** стр. 491–499 (2012)

⁵ M. Amoretti *et al.* // Nature **419**, 456 (2002)

⁶ The STAR Collaboration 2011 // Nature **473**, 353 (2011)

⁷ J.M. Richard, J. Froehlich, G.M. Graf, M. Seifert // Phys. Rev. Lett. **71** 1332-1334 (1993)

⁸ T. Baumann *et al.* // Nature **449**, 1022 (2007)

по-прежнему остаются неизведанной “терра инкогнита”. Удаляясь от стабильных ядер путем добавления протонов или нейтронов мы приближаемся к так называемым линиям отрыва нуклонов, за пределами которых ядра становятся не связанными. За пределами этих линий ядра стремятся избавиться от “лишних” нуклонов и вернуться в стабильные пределы: иначе говоря, за пределами этих линий сильное взаимодействие не в состоянии образовать связанное состояние нуклонов.

Еще не открытые части карты нуклидов могут помочь ответить на некоторые вопросы, имеющие фундаментальное значение: Каких пределов в числе нуклонов и протонов могут достичь стабильные ядра? Каковы свойства ядер с экстремальным соотношением N/Z , где N число нейтронов, а Z число протонов? Ядра, удаленные от границы стабильности имеют свойства, отличные от ядер вдоль линии стабильности: здесь могут наблюдаться изменения магических чисел, существенное увеличение размера ядер, сильные скачки деформации и многие другие интересные структурные явления. Остается открытым интересный вопрос, касающийся существования острова стабильности сверхтяжелых элементов, а также стабильность большого числа нейтронов⁹. Относительно недавний эксперимент⁸ позволил обнаружить новые квадраты на карте нуклидов, а именно стабильные изотопы ^{40}Mg и ^{42}Al . Достаточно точные расчеты ядер вблизи границ стабильности получаются с применением метода Хартри–Фока с силами Скирма. Данный метод получил широкое распространение, начиная с известных работ Вотерина и Бринка¹⁰, где силы Скирма были успешно использованы для описания сферических и деформированных ядер. Нуклонное спаривание учитывается при этом методом БКШ. Широкое распространение в настоящее время получил метод

⁹ *Легкие и промежуточные ядра вблизи границ нуклонной стабильности*, А. И. Базь, В. И. Гольданский, В. З. Гольдберг, Я. Б. Зельдович, Москва “Наука” (1972)

¹⁰ D. Vautherin and D. M. Brink// *Phys. Rev. C* **5** 626 (1972)

Хартри–Фока–Боголюбова, где спаривание учитывается более естественным способом¹¹. Данные методы достаточно достоверно предсказывают энергии отделения одного или нескольких нуклонов, что позволяет точно оценить границы протонной и нейтронной стабильности на карте нуклидов. По разные стороны от границы энергия отделения одного или двух нейтронов меняет знак. Особенно интересно понять общие закономерности поведения границ стабильности, а именно, насколько они монотонны, могут ли они выгибаться, образуя полуострова стабильности. Данный вопрос тщательно исследуется в диссертации, где показывается возможность существования полуостровов за счет оболочечных эффектов.

Во многих задачах ядерной, атомной и молекулярной физики крайне важно качественное понимание поведения волновой функции системы, которая описывает связанное состояние, но близка к энергетическому порогу, соответствующему развалу системы. Прежде всего, речь может идти о размере, достигаемом системой. Среди многочисленных примеров слабо связанных систем можно отметить отрицательные атомные и молекулярные ионы,¹² Ефимовские состояния. В настоящее время в атомной и ядерной физике наблюдается повышенный интерес к системам, имеющим необычно большую пространственную протяженность, что проявляется в образовании так называемого нейтронного *гало*. Под понятием “гало”¹³ обычно понимается, что существует значительная вероятность нахождения частицы в классически запрещенной области. Данное определение можно также переформулировать, говоря, что усредненные расстояния между частицами могут существенно превосходить радиус взаимодействия между частицами. Интерес к подобным системам зародился с открытия гало-образных легких атомных ядер, постепенно данная кон-

¹¹ M. V. Stoitsov *et al.*// Phys. Rev. C **68**, 054312 (2003)

¹² H. Hogreve// J. Phys. B **31**, L439 (1998)

¹³ A. S. Jensen, K. Riisager, and D. V. Fedorov// Rev. Mod. Phys. **76** 215 (2004)

цепция утвердилась в атомной и молекулярной физике¹³. Типичный пример гало-образной системы представляют собой слабо связанные ядра ${}^6\text{He}$ и ${}^{11}\text{Li}$, где наблюдается четкая трех-частичная структура, состоящая из хорошо связанного кластера (ядра ${}^4\text{He}$ и ${}^9\text{Li}$ соответственно), а также двух нейтронов. Данные ядра, рассматриваемые как трехчастичные системы обладают так называемым Борромеальным свойством: если одну из трех “частиц” удалить, то оставшиеся две частицы не образуют связанного состояния и распадаются. Эффективный размер таких систем намного больше чем у нормальных стабильных ядер, имеющих примерно ту же массу. Численные расчеты¹⁴ продемонстрировали, что для воспроизведения гало критически необходим низко-лежащий резонанс во взаимодействии двух нейтронов. Даже такая “наивная” модель *динейтрона*, где два нейтрона описываются как одна частица эффективно применяется и по сей день.

Для поведения размера связанного состояния по мере приближения к порогу развала можно указать две ключевые возможности. Первая состоит в том, что вероятность найти все частицы в заданном объеме пространства стремится к нулю, что в свою очередь влечет бесконечное увеличение размера системы. Подобное поведение можно наблюдать в ридберговской серии уровней атома, где электрон все дальше и дальше удаляется от ядра (относительно недавно был проведен эксперимент, где атом Калия достигал¹⁵) размера в 1мм; также можно упомянуть двухатомный гелий¹⁶ или галообразные ядра ${}^6\text{He}$ и ${}^{11}\text{Li}$. Вторая возможность состоит в том, что вероятность найти частицы в ограниченной части пространства остается конечной, что в конечном счете ведет к образованию *связанного порогового состояния*, из определения которого ясно, что энергия данного состояния совпадает с нижней

¹⁴ M.V. Zhukov *et al.*// Phys. Rep. **231**, 151 (1993)

¹⁵ J. J. Mestayer *et al.*// Phys. Rev. Lett. **100**, 243004 (2008)

¹⁶ F. Lou, C.F. Giese and W.R. Gentry// J. Chem. Phys. **104**, 1151 (1996)

гранью сплошного спектра. В таком случае размер системы остается конечным. (Математически данное явление называется поглощением собственного значения).

Напомним, что в ядерной физике гало образуются, как правило, на линии отрыва нейтронов. Протонные гало (гораздо слабее нейтронных) существуют только в очень легких ядрах, обладающих малым зарядом¹⁷. Оказывается, отталкивающий далекодействующий кулоновский потенциал создает непроходимый барьер, который мешает волновой функции растекаться. В многочастичном случае это происходит по аналогии с двухчастичным случаем¹⁸. Ключевой объект анализа в атомной физике – система, состоящая из ядра с зарядом Z и N_e электронов, энергию основного состояния которого обозначим $E(Z, N_e)$. Когда $Z = N_e$ получается атом, а в случае $Z < N_e$ система представляет собой отрицательный ион. Заряд ядра Z_{cr} называется *критическим*, если $E(Z_{cr}, N_e) = E(Z_{cr}, N_e - 1)$ и $E(Z, N_e) < E(Z, N_e - 1)$ для $Z > Z_{cr}$. Известно¹⁹, что $Z_{cr} \leq N_e - 1$. Строгое доказательство существования критического заряда обсуждается в работах²⁰. Либ²¹ показал, что $Z_{cr} \geq N_e/2$, а в работе²² доказывалось, что $Z_{cr}/N_e \rightarrow 1$ при $N_e \rightarrow \infty$ (ядро в этих случаях предполагается бесконечно тяжелым). Существует предположение, на данный момент не опровергнутое экспериментом, что $Z_{cr} \in (N_e - 2, N_e - 1]$ для всех элементов периодической системы²³. В диссертации дается строгое доказательство того факта, что волновая функция не растекается при $Z \rightarrow Z_{cr}$, и при этом образуется связанное состояние с энергией равной энергии порога.

¹⁷ P. G. Hansen// Nucl. Phys. A **553**, 89c (1993)

¹⁸ D. Bolle, F. Gesztesy and W.Schweiger// J. Math. Phys **26**, 1661 (1985)

¹⁹ G. M. Zhislin// Trudy Mosk. Mat. Obšč. **9**, p. 81 (1960)

²⁰ M. B. Ruskai// Comm. Math. Phys. **82**, p. 457 (1982); I. M. Sigal// Annals of Physics **157**, pp. 307-320 (1984)

²¹ E. H. Lieb// Phys. Rev. A **29**, 3018 (1984)

²² E. H. Lieb *et al.*// Phys. Rev. Lett. **52** 994 (1984)

²³ B. Simon, *Schrödinger operators in the twenty-first century*, Imperial College Press, London, pp. 283-288 (2000)

В 1970 В. Ефимов предсказал²⁴ удивительное, противоречащее всем интуитивным представлениям явление, теперь называемое эффектом Ефимова. Данное явление можно описать следующим образом. Пускай трехчастичный Гамильтониан H не имеет отрицательного существенного спектра, но хотя бы две из трехчастичных подсистем обладают резонансом при нулевой энергии. Тогда H обладает бесконечным числом связанных состояний с отрицательной энергией. При этом парные взаимодействия могут иметь конечный радиус действия. С одной стороны, предсказанный эффект находился в противоречии с общими представлениями того времени, когда предполагалось, что только дальнедействующие потенциалы могут обеспечить бесконечное число уровней (как это происходит в случае ридберговской серии в атомах). С другой стороны, это частично объясняло, почему в математических формулировках условий, обеспечивающих конечность дискретного спектра, необходимо было избегать резонансных взаимодействий. Первый набросок математического доказательства эффекта Ефимова было дано Л. Д. Фаддеевым вскоре после того как В. Ефимов рассказал ему о своем открытии. Первое опубликованное доказательство, не без изъянов, появилось в²⁵. Позже²⁶ Д. Р. Яфаев основываясь на идее Фаддеева представил полное математическое доказательство; в статьях²⁷ можно найти доказательства, использующие другие методы. Первоначальный аргумент Фаддеева и вывод спектральной асимптотики в случае трех одинаковых части можно найти в книге²⁸. Спектральная асимптотика в случае частиц с неодинаковой массой обсуждается в²⁹. Экспе-

²⁴ V. Efimov// Phys. Lett. **В 33** 563 (1970)

²⁵ R. D. Amado, J. V. Noble// Phys. Rev. **D 5**, 1992 (1972)

²⁶ Д. Р. Яфаев// Математический Сборник **23**, 535 (1974)

²⁷ Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal// Annals of Physics **123**, 274-295 (1979); Н. Tamura// J. Funct. Anal. **95** 433 (1991)

²⁸ С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Издательство М. Наука, 1998

²⁹ A. V. Sobolev// Commun. Math. Phys. **156**, 101 (1993)

риментально эффект был подтвержден лишь в 2005 году³⁰. В ядерной физике также ведется поиск ефимовских состояний, наиболее вероятным кандидатом считается³¹ ядро ^{20}C .

После того, как эффект Ефимова был доказан для трехчастичного случая, исследователи немедленно заинтересовались его самым прямым обобщением, а именно случаем четырех бозонов, у которых отсутствует отрицательный сплошной спектр. Амадо и Гринвуд в работе³² утверждали, что доказали невозможность эффекта Ефимова для $N \geq 4$ бозонов. Для четырех бозонов позже было получено численное подтверждение данного утверждения. Здесь теория натывается на еще одну странность: каким-то образом получается, что данный эффект может существовать исключительно для трех бозонов, ни больше ни меньше. Аргументы, представленные в работе Амадо–Гринвуда, являются ошибочными, несмотря на правильность предсказываемого результата. В настоящей работе мы дадим строгое доказательство предположения Амадо–Гринвуда.

Целью диссертационной работы является анализ пороговых явлений в задачах ядерной и атомной физики, связанных со стабильностью многочастичных конфигураций, а также с поведением волновых функций и спектра вблизи порога.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Впервые с помощью вариационных методов получены условия, гарантирующие нестабильность четырех заряженных частиц.
2. Впервые для многих нестабильных нейтронноизбыточных ядер показана возможность восстановления стабильности за счет добавления необ-

³⁰ T. Kraemer *et al.*// Nature **440**, 315 (2006)

³¹ I. Mazumdar, A. R. P. Rau, and V. S. Bhasin// Phys. Rev. Lett. **97**, 062503 (2006)

³² R. D. Amado, F. C. Greenwood, Phys. Rev. **D 7**, 2517 (1973)

ходимого числа нейтронов.

3. Разработан строгий метод анализа волновых функций вблизи порога, основанный на понятии “растекающейся” последовательности функций.
4. Впервые доказана возможность существования порогового основного состояния в многочастичной системе с короткодействующими потенциалами.
5. Впервые доказано, что полностью растекающиеся волновые функции в системе трех частиц возможны только при наличии нулевого резонанса как минимум в одной из пар частиц.
6. Доказано, что угловое распределение полностью растекающейся волновой функции трех частиц задается универсальной формулой, не зависящей от природы парных взаимодействий. Впервые показано, что динейтронный пик в гало-ядрах описывается этим распределением.
7. Представлен метод анализа двухчастичных функций Грина для задач с отталкивательным потенциалом. С помощью разработанного метода функция Грина оценивается сверху и снизу поточечно, причем данные оценки становятся асимптотически точными, когда один из аргументов функции стремится к бесконечности. Данный метод позволяет строго вычислять асимптотическое поведение волновых функций пороговых состояний.
8. Доказана теорема, объясняющая невозможность формирования протонного гало для ядер с большим Z , а также предсказывающая существование связанного порогового состояния для ядер и отрицательных ионов атомов, если заряд ядра становится критическим.

9. Разработан принцип Бирмана–Швингера в абстрактной форме, позволяющий связать операторы Бирмана–Швингера для системы с помощью таких же операторов для подсистем.
10. Впервые получено строгое доказательство гипотезы, гласящей, что эффект Ефимова возможен только для трех бозонов, ни больше ни меньше.

Практическая значимость. Для экзотических молекул, состоящих из трех и четырех частиц указаны необходимые условия стабильности, что облегчает практический поиск таких систем. Предсказаны новые стабильные нейтронноизбыточные изотопы. Предсказывается возможность создания связанных состояний трех атомов, имеющих большую пространственную протяженность в основном состоянии. Получена формула, описывающая волновую функцию такого состояния (формула является точной в пределе полного растекания), а также угловое распределение частиц.

Результаты и положения, выносимые на защиту.

1. Найдены необходимые условия стабильности для трех заряженных частиц, обладающих конечной массой, где под стабильностью понимается существование связанного состояния.
2. Найдены необходимые условия стабильности для четырех заряженных частиц, обладающих конечной массой, где под стабильностью понимается существование связанного состояния. В частности, дается строгое доказательство нестабильности молекулы водород-антиводород, состоящей из протона, антипротона, электрона и позитрона.
3. Методом Хартри-Фока с силами Скирма исследована стабильность разных изотопов с большим числом нейтронов. Предсказано существование

полуостровов стабильности и сверхмассивных стабильных изотопов урана.

4. Исследовано поведение волновых функций вблизи порога в двухчастичной задаче, где во взаимодействии присутствует дальнодействующее отталкивание. Получены строгие и асимптотически корректные оценки функций Грина и волновых функций.
5. Получено строгое математическое доказательство того, что отрицательные ионы атомов имеют связанное пороговое состояние, если заряд атома становится критическим.
6. Исследовано пороговое поведение волновой функции в трехчастичной задаче. Получены строгие условия существования связанных пороговых состояний.
7. Доказано существование в трехчастичной системе несвязанных пороговых состояний, если отсутствует отрицательный сплошной спектр, а хотя бы одна пара частиц имеет резонанс при нулевой энергии.
8. Получено явное универсальное выражение угловой плотности распределения трех частиц в случае, когда за счет изменения констант связи, основное состояние полностью растекается. Данное выражение повторяет распределение так называемого двухнейтронного пика, наблюдаемое в ядрах со структурой двухнейтронного гало. Предсказано существование подобных состояний в атомной и молекулярной физике.
9. Получено новое короткое доказательство теоремы Жислина–Вугальтера о конечности дискретного спектра в многочастичной задаче.
10. Получены новые условия конечности дискретного спектра в многочастичной задаче. В качестве одного из следствий данного результата, по-

лучено строгое доказательство того факта, что эффект Ефимова невозможен в случае четырех и более бозонов.

Апробация работы. Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в известных международных реферируемых журналах. Результаты докладывались

— на научных семинарах кафедры ядерной физики Санкт-Петербургского государственного университета в 2002-2012 г.г.;

— На научных семинарах в университетах Франкфурта на Майне, Касселя, Кайзерслаутерн в Германии в 2006-2012 г.г.;

— на международной конференции “Workshop on Quantum Few-Body Systems” в Архусе, Дания, Март 19-20 2007;

— на международной конференции “Workshop on Critical Stability” в Эриче, Италия Октябрь 19-20 2008. ;

— на международной конференции “Symposium on Exciting Physics”, Макутси, Юар, Ноябрь 13-20 2011;

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 21 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, разбитых на параграфы (нумерация параграфов подчинена нумерации глав, нумерация теорем подчинена нумерации параграфов), заключения и списка литературы. Полный объем диссертации – 241 страница, библиография включает 201 наименования, из которых 21 – публикации автора по теме диссертации.

Содержание работы

Во Введении Во введении содержится формулировка результатов диссертации; представлены результаты, предшествующие появлению работы, да-

ется краткое содержание глав.

В первой главе, в §§1.1–1.3 вводятся необходимые термины и исследуется задача стабильности трех частиц с зарядами $\{1, -1, -1\}$. Под стабильностью системы, описываемой Гамильтонианом H мы всегда будем понимать существование связанного состояния ниже границы сплошного спектра, которую мы будем обозначать как $\inf \sigma_{ess}(H)$. Известно, что три частицы с зарядами $\{1 + \varepsilon, -1, -1\}$, взаимодействующие исключительно посредством кулоновских сил, при любом $\varepsilon > 0$ образуют стабильную систему, независимо от значений масс частиц. При $\varepsilon = 0$ ситуация резко меняется, и из-за эффекта экранировки не все системы остаются стабильными. Типичный пример в этом отношении представляет собой мюонный ион водорода $p\mu^-e^-$, где мюон, обращающийся рядом с протоном экранирует заряд так, что система распадается. При этом pe^-e^- имеет связанное состояние ниже порога (ровно одно), то есть является стабильным. Данный факт был доказан строго в работе³³.

Осуществляя “проекцию” задачи на пространство, где атом всегда находится в основном состоянии, позволяет свести проблему к задаче, где третья частица движется в поле образованном двумя другими частицами, находящимися в основном состоянии. И вопрос связанности трех частиц сводится к вопросу о связанности данных частицы в эффективном поле двух других. В случае конечных масс проектор на связанное состояние атома не коммутирует с парным взаимодействием третьей частицы и ядра.

Пусть $m_i, q_i, \mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ обозначают массы, заряды и вектора местоположения частиц $i = 1, 2, 3$. Мы выбираем заряды следующим образом $q_1 = +1$, и $q_{2,3} = -1$. Тогда взаимодействия между частицами принимают вид $V_{ik} = q_i q_k / |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$. Мы пронумеровываем частицы таким образом, что частицы $\{1, 2\}$ соответствуют самому низко лежащему порогу развала. Мы пользуем-

³³ R.N. Hill// J. Math. Phys. **18**, 2316 (1977)

ся системой единиц в которых $\hbar = 1$. Для того, чтобы отделить движение центра масс мы пользуемся координатами Якоби. Обозначим $\mathbf{x} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{y} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 + a\mathbf{x}$, где безразмерный параметр a имеет вид $a = m_2/(m_1 + m_2)$. Соответствующие координатам Якоби импульсы принимают вид $p_{x,y} = -i\nabla_{x,y}$. Введем обозначения приведенных масс Якоби $\mu_x = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ и $\mu_y = m_3(m_1 + m_2) / (m_1 + m_2 + m_3)$. Умножение всех масс на постоянный коэффициент не влияет на стабильность или нестабильность.

Система нестабильна, если $\mu_y/\mu_x < (11 - 2\sqrt{10})/27 \simeq 0.1732$. Полученный результат более чем достаточен для доказательства нестабильности таких систем как $p\mu^-e^-$ или μ^-pe^+ (достаточно просто подставить массы в условие стабильности). Подчеркнем также, что полученное условие является физическим. Обе приведенные массы Якоби определяют длину боровского радиуса для двух орбит: орбиту относительного движения частиц $\{(1, 2\}$ и орбиту движения третьей частицы вокруг центра масс и в поле, создаваемом частицами $\{(1, 2\}$. Если орбита пар частиц мала по сравнению со второй орбитой, то возникает эффект экранировки (третья частица "видит" только нейтрально заряженный объект) и система становится нестабильной.

В §1.4 рассматривается условие стабильности для четырех частиц, в первую очередь представляет собой интерес молекула водород–антиводород. В этом разделе математически доказывається, что такая молекула не может быть стабильной. И дело здесь не только в аннигиляции материи и антиматерии: такая экзотическая молекула не может в первую очередь существовать как кулоновская система. Водород и антиводород распадаются на протоний ($p\bar{p}$) и позитроний (e^+e^-). В принципе, уже давно предполагалось, что с помощью чисто кулоновских сил невозможно получить связанное состояние молекулы водород–антиводород. Численные расчеты подтверждали³ это предположение, но на нехватку достоверного строго доказательства указывали

многие авторы³⁴³⁵. В этом разделе мы решаем следующие задачи: (1) строгое математическое доказательство нестабильности молекулы водород–антиводород; (2) объяснение принципа экранировки в случае четырех заряженных частиц. Из полученных результатов также следует, что следующие системы не имеют связанных состояний ниже порога диссоциации: $p\mu^-e^+e^-$, $\mu^+\mu^-e^+e^-$, $d\bar{p}e^+e^-$, $t\bar{p}e^+e^-$ (d, t обозначают дейтрон и тритий соответственно).

Физическая причина нестабильности молекулы $H-\bar{H}$ кроется опять же в экранировке. В предыдущем разделе мы показали, что эффект экранировки в системе трех заряженных частиц выражается через критическое отношение якобиевских масс. Эти массы обратно пропорциональны боровским радиусам орбит: одна орбита соответствует относительному движению пары частиц (двух частиц, энергия связи которых равна нижней границе сплошного спектра), другая орбита отвечает движению третьей частицы в поле, создаваемой данной пары. Если орбита третьей частицы обладает большим радиусом, тогда она “видит” нейтральный объект, поскольку в паре находятся частицы с равновеликим, но разноименным зарядом. В результате система распадается: третья частица покидает систему и остается только связанная пара.

Самый низкий порог распада для нестабильной системы из четырех зарядов $(m_1^+, m_2^-, m_3^+, m_4^-)$ – это распад на две нейтральные пары. В самом деле, если предположить, что самый низкий порог распада соответствует распаду на одну частицу и кластер из трех частиц, то тогда два этих объекта будут противоположно заряжены, а как известно, в кулоновском хвосте может поместиться сколько угодно связанных состояний и система будет стабильной. Значит имеет смысл рассматривать только случай, когда самый низкий порог соответствует распаду на две нейтральные пары. По аналогии с трехчастичной

³⁴ E.A.G. Armour and C. Chamberlain// Few-Body Systems **31**, 101 (2002);

³⁵ J.-M. Richard// Phys. Rev. A **49**, 3573 (1994); Few-Body Systems **31**, 107 (2002)

задачей мы рассмотрим три орбиты: две орбиты относительного движения в нейтральных парах и третья орбита относительного движения двух нейтральных пар относительно центра масс. Обозначим приведенные массы Якоби для нейтральных пар как $\mu_x = m_1^+ m_2^- / (m_1^+ + m_2^-)$ и $\mu_y = m_3^+ m_4^- / (m_3^+ + m_4^-)$. Приведенная масса Якоби соответствующая относительному движению двух пар имеет вид $\mu_R = (m_1^+ + m_2^-)(m_3^+ + m_4^-) / (m_1^+ + m_2^- + m_3^+ + m_4^-)$. Важно, что мы нумеруем частицы таким образом, что самый низкий порог распада это распад на $(m_1^+ m_2^-) + (m_3^+ m_4^-)$ и частицы упорядочены таким образом, что $\mu_x \geq \mu_y$. Нетрудно проверить, что при таком упорядочении выполняется $\mu_R \geq 4\mu_y$.

Теперь сформулируем эффект экранировки, принимая во внимание, что радиусы Боровских орбит обратно пропорциональны приведенным массам Якоби. Условие $\mu_y \ll \mu_R$ само по себе еще недостаточно для экранировки, система $(m_1^+, 1^-, m_3^+, 1^-)$ стабильна при любых m_1^+ и m_3^+ . Трехчастичная система $(m_1^+, 1^-, 1^-)$ всегда стабильна³³ и при $m_3^+ \ll 1$ мы попадаем в ситуацию, когда $\mu_y \ll \mu_R$ и $\mu_R \approx \mu_x$ и все равно вся система стабильна. Когда же $\mu_R \ll \mu_x$ мы вправе ожидать экранировку, потому что в этом случае пара частиц (m_1^+, m_2^-) обладает очень короткой внутренней орбитой и остальные частицы “видят” связанную пару частиц (m_1^+, m_2^-) как нейтрально заряженную, что приводит к развалу системы. Доказывается следующее утверждение

$$\frac{\mu_R}{\mu_x} \leq \frac{13 - 2\sqrt{22}}{54} \approx 0.067 \implies \text{Нестабильность.} \quad (1)$$

Уравнение (1) формулирует условие экранировки в системе четырех частиц. Из (1) легко следует, например, что молекула водорода–антиводорода не имеет связанных состояний и должна распадаться на протоний и позитроний. Мюонные молекулы $p\mu^- e^+ e^-$, $\mu^+ \bar{p} e^+ e^-$ и $\mu^+ \mu^- e^+ e^-$ также оказываются нестабильными. Из формулы (1) также следует, что если в системе водород–антиводород заменить ядро атома водорода на дейтерий или тритий, то это все

равно не приведет к стабильности. Доказательство (1) строится по тому же принципу, что и условие нестабильности для трех частиц. “Нестабильность” в Ур. (1) означает не только то, что связанного состояния нет ниже границы сплошного спектра, но также и отсутствие оно на самом пороге.

В §1.5 рассматривается стабильность ядер с избытком нейтронов. Стандартный подход при нахождении линии отрыва нейтронов состоит в том, чтобы к стабильному ядру с фиксированным зарядом Z добавлять нейтроны до тех пор, пока ядро не окажется нестабильным и будет путем распада пытаться избавиться от лишних нейтронов. Характерно, что данный метод подразумевает такое поведение линии отрыва нейтронов, при котором каждая линия, соответствующая постоянному числу протонов пересекает линию отрыва нейтронов лишь однажды. В работах [A9]–[A22] было показано, что структура линии отрыва нейтронов может быть сложнее. А именно, в окрестности “магических” чисел (или искаженных “магических” чисел) может происходить следующее. В некоторый момент, ядро, получая новые нейтроны теряет стабильность. Но при добавлении еще некоторого числа нейтронов стабильность восстанавливается. Это приводит к образованию так называемых полуостровов стабильности.

Детальный анализ данного явления был предпринят в работах [A9]–[A22], где были исследованы изотопы следующих элементов Pb, Zr, Ar, Kr, Rn, Gd, Ba, S, и т. д. При этом в данных работах основной упор делался на поиске полуостровов стабильности и исследовании свойств ядер, лежащих на данных островах. Достоверные расчеты ядер проводились с помощью метода Хартри–Фока с силами Скирма. Детальное описание метода можно найти в [A16].

Полуострова стабильности формируются вокруг “магических” чисел нейтронов или около искаженных магических чисел. Полуострова стабильности вытянуты вдоль линии Z , сужаясь к своему основанию. Было установлено,

что во всех случаях образования полуостровов стабильности работает один и тот же механизм. Когда нейтроны добавляются к нестабильному ядру это меняет эффективный потенциал таким образом, что полностью заполненные подболочки опускаются из сплошного спектра в область связанных состояний с отрицательной энергией. В диссертации перечисляются найденные стабильные изотопы и соответствующие подболочки, ответственные за усиление стабильности; многие из данных изотопов стабильны по отношению к испусканию не только одного, но и двух нейтронов.

В указанных работах рассматривались разные варианты сил Скирма, такие как $SLy4$, SkM^* , $SkPII$, SkI и т.д. Обнаружено, что те числа нейтронов, при которых образуются полуострова нейтронной стабильности, не зависят от типа сил. Варьируется только степень протяженности полуостровов. Ввиду установленной инвариантности можно с уверенностью говорить о том, что полуострова стабильности представляют собой универсальное качественное явление, присущее линии отрыва нейтронов и возникающее из-за оболочечных эффектов.

Очень тяжелые и стабильные ядра были предсказаны в работе [A22]. Результаты подтверждаются не только расчетами с помощью метода Хартри-Фока с силами Скирма, но и методом релятивистского среднего поля. Получаемые стабильные и сильно нейтронно избыточные ядра представлены в Таблице . Стабильность тяжелых ядер возникает из-за магичности числа нейтронов $N=258$. Данные тяжелые ядра соответствуют глобальному минимуму полной энергии, если рассмотреть ее зависимость от числа нейтронов.

Отметим также, что плотности ядер становятся очень протяженными вблизи границы стабильности. Можно говорить о том, что вблизи данных ядер образуется нейтронное гало. Для иллюстрации сравним протонные и нейтронные среднеквадратичные радиусы, которые мы обозначим R_p и R_n соответственно. Для ядер в центре долины стабильности как правило R_n —

Z	NL-Z2	SkM*	SkI4	Sly6
92	258	220	218	206
94	258	230	230	208
96	258	258	230	208
98	258	258	258	218
100	258	258	258	220
102	258	258	258	220
104	258	258	258	232

Таблица 1. Ядра, имеющие максимальную энергию связи для различных Z и различных моделей (NL-Z2 соответствует релятивистскому среднему полю, остальные обозначения соответствуют разным силам Скирма). В крайнем левом столбце задано число протонов, в остальных столбцах записано соответствующее число нейтронов.

$R_p \simeq 0.1 - 0.2$ фм. В то же время для ^{40}O $R_n - R_p \simeq 1.29$ фм, а $R_n/R_p \simeq 1.44$. Для стабильного ^{248}Gd получается $R_n - R_p \simeq 0.77$ фм, а $R_n/R_p \simeq 1.14$. Аналогично, для ^{240}Ba получается $R_n - R_p \simeq 0.94$ фм и $R_n/R_p \simeq 1.17$. С учетом мультинейтронного распада, обсуждавшимся выше, в данном случае можно говорить о мультинейтронных гало-ядрах.

Во второй главе исследуется пороговое поведение волновых функций. Сначала проводится доказательство для $N = 3$, где N число частиц, а в §2.4 полученный результат обобщается на большие N и потенциалы с разным знаком. В §§2.1–2.2 вводятся необходимые термины и формулируется понятие растекающейся последовательности волновых функций. Рассматривается N -частичный Гамильтониан

$$H(\lambda) = H_0 - \lambda \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(r_i - r_j), \quad (2)$$

где $\lambda > 0$ константа связи, H_0 оператор кинетической энергии, не включающий движение центра масс, $r_i \in \mathbb{R}^3$ вектора положений частиц. Пред-

положим, что для λ в окрестности $\lambda_{cr} \in (0, \infty)$ существует связанное состояние $\psi(\lambda) \in D(H_0)$ с энергией $E(\lambda) < \inf \sigma_{ess}(H(\lambda))$, так что $E(\lambda) \rightarrow \inf \sigma_{ess}(H(\lambda_{cr}))$ когда $\lambda \rightarrow \lambda_{cr}$.

Рассмотрим систему частиц с $N = 3$ и неотрицательными потенциалами. Наложим условие, что все двухчастичные системы не имеют связанных состояний с отрицательной энергией, а также виртуальных уровней с нулевой энергией. Отсюда следует $E_{thr}(\lambda) = 0$. Доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть $N = 3$ и дана последовательность $\lambda_n \rightarrow \lambda_{cr}$ такая, что все двухчастичные системы при $\lambda = \lambda_n, \lambda_{cr}$ не имеют связанных состояний с отрицательной энергией, а также виртуальных уровней с нулевой энергией. Пусть $\psi(\lambda_n)$ является последовательностью связанных состояний с энергиями, приближающимися к порогу снизу. Тогда для $n \rightarrow \infty$ последовательность $\psi(\lambda_n)$ не растекается, а также существует пороговое состояние $\psi_{cr} \in D(H_0)$, для которого $H(\lambda_{cr})\psi_{cr} = 0$.*

Доказательство в сущности базируется на уравнениях Фаддеевского типа. Из результатов данной главы следует, что волновая функция не будет полностью растекаться, если нет ни одной пары частиц, имеющих резонанс при нулевой энергии. При отсутствии двухчастичных резонансов будет образовываться связанное пороговое состояние (т. е. квадрат абсолютной величины волновой функции будет интегрируем). Стоит отметить, что связанные пороговые состояния при нулевой энергии связи не спадают экспоненциально в отличие от состояний, отвечающих ненулевой энергии связи. Используя элементарные оценки функции Грина легко показать, что $\psi_{gr} \geq A\rho^{-4}$, где ψ_{gr} нормированное основное состояние при нулевой энергии, которое может быть выбрано положительным, A константа, а ρ гиперрадиус. Результаты, представленные в данной главе, помогают построить общую строгую теорию гало-образных состояний. В следующей главе показывается, что усло-

вие, состоящее в отсутствии нулевых виртуальных уровней в подсистемах существенно.

Стоит заметить, что результат в многочастичном случае отличается от двухчастичного, где при схожих условиях основное состояние при нулевой энергии никогда не может являться связанным [A7]. Хочется особо подчеркнуть, что полученный автором результат, говорящий о том, что виртуальный многочастичный уровень при нулевой энергии в действительности является связанным состоянием, трудно предсказуем и не очевиден. Это прежде всего вопрос расчета, и данный факт имеет далеко идущие физические последствия, особенно, в том, что касается размеров систем в основном состоянии. Также именно этот вывод по сути объясняет отсутствие эффекта Ефимова для $N \geq 4$ бозонов.

В §2.4 результаты обобщаются на многочастичный случай. Помимо общей теоремы доказывается следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть $N \geq 3$ и $H(\lambda_{cr})$ имеет критическую константу связи. Пусть кроме этого $H(\lambda_{cr})$ не имеет подсистем, у которых есть связанные состояния с энергией $E \leq 0$, а также ни одна пара частиц не имеет резонансов с нулевой энергией. Тогда существует нормированная волновая функция $\psi_0 \in D(H_0)$ такая, что $H(\lambda_{cr})\psi_0 = 0$.*

В данном разделе также доказывается так называемая теорема о декластеризации. В данной теореме рассматривается система, у которой ни одна из подсистем не имеет связанного состояния с отрицательной энергией. Теорема гласит, что если для системы существует последовательность функций, которая минимизирует функционал энергии и полностью растекается, то расстояние между любой парой частиц для данной последовательности стремится к бесконечности.

В третьей главе рассматриваются резонансы с нулевой энергией в трех-

частичных системах. предыдущей главе было доказано, что критически связанная трехчастичная система обладает квадратично-интегрируемым состоянием с нулевой энергией, если ни одна из двухчастичных подсистем не обладает ни связанными состояниями с отрицательной энергией, ни виртуальными уровнями с нулевой энергией. Естественно возникает вопрос, существенно ли условие отсутствия нулевых виртуальных уровней у двухчастичных подсистем. В этой главе доказывается, что это действительно так. А именно, если хотя бы одна пара частиц обладает резонансом с нулевой энергией, тогда квадратично-интегрируемое основное состояние трех частиц существовать не может.

В §3.3 показывается, что действительно существуют 3-х частичные системы, где двухчастичные подсистемы не связаны, одна из двухчастичных подсистем имеет виртуальный уровень нулевой энергии, а вся трехчастичная система имеет виртуальный уровень с нулевой энергией (волновая функция этого уровня не может быть квадратично интегрируемой). Такого рода системы конструируются путем подбором констант взаимодействия. Константы связи всегда можно подобрать таким образом, чтобы для любых заданных $R, \epsilon > 0$: (а) сплошной спектр оставался бы неотрицательным; (b) а также существовало основное состояние $\psi(\xi)$ соответствующее уровню с отрицательной энергией, где $\int |\psi(\xi)|^2 = 1$; (с) $\int_{|\xi| \leq R} |\psi(\xi)|^2 < \epsilon$. Это будет означать растекание волновой функции вблизи порога.

В контексте гало-образных состояний нельзя не упомянуть так называемые ефимовские состояния, предсказанные в²⁴. Данные состояния возникают, когда две из трех двухчастичных подсистем имеют или очень большую длину рассеяния или связанные основные состояния около нулевой энергии. В пределе нулевого резонанса у этих подсистем трехчастичная система имеет бесконечное число связанных состояний. При этом энергия связи n -го состояния уменьшается экспоненциально вместе с n , а каждое следующее связан-

ное состояние увеличивает размер системы примерно в 25 раз. Удивительным образом трехчастичная система обладает бесконечным числом связанных состояний, несмотря на то, что все двухчастичные системы вообще не связаны. Спустя 35 лет после их предсказания данные состояния были обнаружены экспериментально группой Крэмера и др. в ультрахолодном газе атомов цезия. В данной работе мы предсказываем существование бесконечно протяженных состояний, если хотя бы **одна** пара частиц имеет резонанс при нулевой энергии. Сорты атомов, обладающих таким свойством могут быть “приготовлены” в ультрахолодных газах с помощью магнитного поля и Фешбаховских резонансов. По аналогии с Ефимовским эффектом они могут быть обнаружены с помощью так называемого трехчастичного коэффициента потерь.

В §§3.4–3.5 исследуется асимптотическое поведение растекающейся волновой функции трех частиц. В следующей теореме утверждается, что полностью растекающаяся последовательность двухчастичных связанных состояний приближается к выражению, которое не зависит от деталей парного взаимодействия.

Теорема 3. *Пусть для сходящейся последовательности констант связи $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_{cr} \in \mathbb{R}_+$ существуют $\psi_n \in D(H_0)$, $\|\psi_n\| = 1$ такие, что $H(\lambda_n)\psi_n = E_n\psi_n$, где $E_n < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$. Тогда в случае, если ψ_n полностью растекается, выполнено*

$$\left\| \psi_n - e^{i\varphi_n} \frac{\sqrt{k_n} e^{-k_n|x|}}{\sqrt{2\pi}|x|} \right\| \rightarrow 0, \quad (3)$$

где $\varphi_n \in \mathbb{R}$ некие фазы и $k_n := \sqrt{|E_n|}$.

Мы рассматриваем связанные состояния трех частиц в \mathbb{R}^3 , которые описываются Гамильтонианом $H(\lambda_n) = H_0 + v_{12} + \lambda_n(v_{13} + v_{23})$, где пара частиц $\{1, 2\}$ имеет резонанс при нулевой энергии, и ни одна из пар частиц не имеет ни резонансов ни связанных состояний. Мы докажем следующее: пускай

$H(\lambda_n)\psi_n = E_n\psi_n$, где $E_n \rightarrow 0$ при $\lambda_n \rightarrow \lambda_{cr}$, и помимо этого $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\zeta| \leq R} |\psi_n(\zeta)|^2 d\zeta = 0$ при любом $R > 0$. Тогда угловое распределение вероятности трех частиц, определяемое ψ_n при больших n стремится к точному выражению, которое не зависит от парных взаимодействий. Получаемое выражение прекрасно описывает так называемый двухнейтронный пик в гало-ядрах.

Следует обратить внимание на тот факт, что $\psi_n(x, y)$ *не обязательно представляют собой основные состояния* (x, y обозначают координаты Якоби). Понятно, что волновые функции растекаются в радиальном направлении. При этом особенно интересно понять, как устроено угловое распределение вероятности при больших n .

Запишем волновую функцию в следующей форме $\psi_n(\rho, \theta, \hat{x}, \hat{y})$, где аргументами являются так называемые гиперсферические координаты $\rho := \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$, $\theta := \arctan(|y|/|x|)$, $\theta \in (0, \pi/2)$, а \hat{x}, \hat{y} обозначают единичные вектора в направлениях x, y соответственно. Определим следующим образом угловое распределение вероятности

$$\mathcal{D}_n(\theta, \hat{x}, \hat{y}) := \cos^2 \theta \sin^2 \theta \int \rho^5 |\psi_n(\rho, \theta, \hat{x}, \hat{y})|^2 d\rho. \quad (4)$$

Нормировка $\|\psi_n\| = 1$ подразумевает, что

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \int d\Omega_x \int d\Omega_y \mathcal{D}_n(\theta, \hat{x}, \hat{y}) = 1, \quad (5)$$

где $\Omega_{x,y}$ обозначают телесные углы связанные с единичными векторами \hat{x}, \hat{y} .

Основной результат данной главы, состоит в утверждении, что

$$\mathcal{D}_\infty(\theta, \hat{x}, \hat{y}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_n(\theta, \hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{4}{\pi} \sin^2 \theta, \quad (6)$$

где сходимость подразумевается по мере. Уравнение (6) означает, что для всех допустимых парных потенциалов существует предельное угловое распределение вероятности, которое зависит исключительно от угла θ .

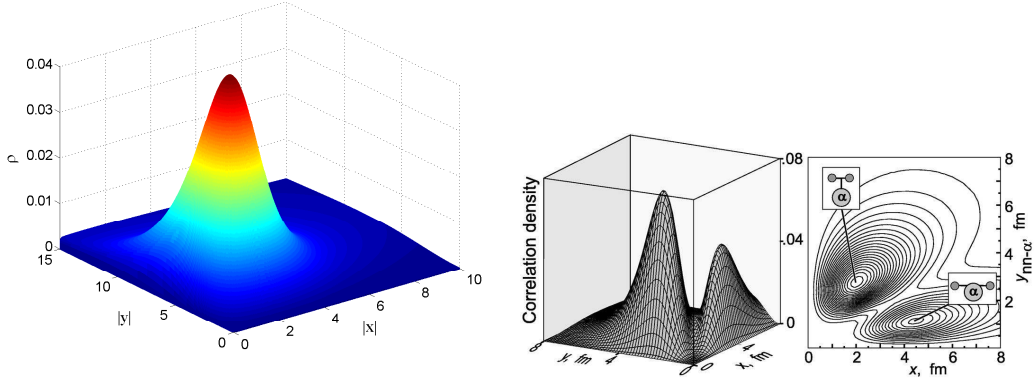


Рис. 1. Распределение плотности, задаваемой Ур. (7). Единицы измерения произвольны. Очевидно сходство с динейтронным пиком для гало-ядра ${}^6\text{He}$ справа.

Следующая теорема является аналогом Теоремы 3 для трехчастичного случая.

Теорема 4. Пусть $H(\lambda_n) = E_n \psi_n$, где $E_n \rightarrow 0$, а ψ_n полностью растекается. Тогда

$$\left\| \psi_n - \frac{e^{i\varphi_n} \chi_{[1,\infty)}(\rho) \{|x| \sin(k_n|y|) + |y| \cos(k_n|y|)\} e^{-k_n|x|}}{2\pi^{3/2} |\ln k_n|^{1/2} (|x|^3|y| + |y|^3|x|)} \right\| \rightarrow 0, \quad (7)$$

где $\varphi_n \in \mathbb{R}$ некие фазы, $\rho := \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$ и $k_n := \sqrt{|E_n|} < 1$.

Данная теорема имеет следующее полезное следствие

Теорема 5. Угловое распределение вероятности $\mathcal{D}_n(\theta, \hat{x}, \hat{y})$ определенное в (4) сходится по мере к $\mathcal{D}_\infty(\theta, \hat{x}, \hat{y}) = (4\pi^3)^{-1} \sin^2 \theta$.

На Рис. 1 приводится сравнение полученного распределения плотности вероятности с динейтронным пиком в распределении нейтронной плотности ядра ${}^6\text{He}$. Сходство очевидно.

В четвертой главе анализируется формирование связанных пороговых состояний при наличии кулоновского отталкивания между частицами.

Для иллюстрации рассмотрим простейший пример: потенциал прямоугольной ямы с добавлением к нему хвоста отталкивательного кулоновского потенциала и представим себе связанное состояние, приближающееся к

порогу. При нулевой энергии связи в таком потенциале возникает связанное состояние с нулевой энергией, спадающее как $\sim \exp(-\sqrt{r})$. Соответственно, вероятность нахождения частиц на расстоянии L при всех значениях энергии близких к нулю остается не равной нулю, и близкой к единице при достаточно большом L .

Если же обрезать данный потенциал на *любом* расстоянии R_c , вероятность нахождения частиц на любом расстоянии L стремится к нулю по мере того как стремится к нулю энергия связи. То есть связанное состояние как бы “туннелирует” через барьер. Строгое доказательство образования пороговых состояний для двух частиц, взаимодействующих посредством короткодействующего потенциала с добавлением потенциала кулоновского отталкивания, было получено в работе¹⁸. Основная идея состоит в анализе точного выражения для функции Грина оператора $H = p^2 + 1/r$, которое дается рядом из специальных функций. Оценки сходящегося ряда позволяют оценить асимптотику связанного состояния. Такой подход, не работает для дальнедействующих потенциалов, имеющих вид $r^{-1} + Ar^{-2}$, которые могут возникать в мультипольных разложениях, а также не подходит для многочастичных задач. В данном разделе предлагается простой метод получения асимптотически точных оценок сверху и снизу функций Грина. Наш анализ отличается тем, что мы анализируем поведение волновой функции по мере приближения к порогу, а не исследуем напрямую асимптотику порогового состояния, чтобы заключить, является ли оно квадратично интегрируемым. Дальнейшие разделы в этой главе посвящены многочастичному обобщению данных результатов.

В §4.7 исследуется поведение собственных значений и собственных функций многочастичного Гамильтониана, зависящего от параметра. Дальнедействующая часть потенциала берется чисто кулоновской. Никаких ограничений на статистику частиц не накладывается (они могут быть как бозоны так

и фермионы). Доказывается, что если нижняя граница сплошного спектра отвечает распаду на два одноименно заряженных кластера, тогда связанное состояние, приближающееся к порогу, не растекается и образуется связанное состояние, имеющее энергию равной энергии порога. В доказательстве используются оценки функций Грина, а также анализ растекающихся последовательностей. Образование пороговых состояний доказывается тем, что волновые функции, приближающиеся к порогу не растекаются. Полученные результаты делают понятным тот факт, что протонные гало не образуются.

В §4.8.1 полученные результаты применяются для анализа диаграммы стабильности трех заряженных частиц с конечными массами.

Определим следующим образом координаты Якоби $\xi = r_3 - r_2$, $R = r_1 - r_2 - s\xi$, где $s = m_3/(m_3 + m_2)$. Гамильтониан, где все взаимодействия кулоновские, имеет вид

$$H(q_1, q_2) = -\frac{1}{2\mu_{23}}\Delta_\xi - \frac{1}{2\mu}\Delta_R - \frac{q_2}{|\xi|} - \frac{q_1}{|(1-s)\xi - r|} + \frac{q_1q_2}{|a\xi + r|} \quad (8)$$

где $\mu_{ik} = m_i m_k / (m_i + m_k)$, $\mu = m_1(m_2 + m_3) / (m_1 + m_2 + m_3)$ приведенные массы. Значения масс остаются фиксированными, а $H(q_1, q_2)$ зависит от $q_{1,2} \geq 0$. H соответствует *стабильной* системе если $\inf \sigma H(q_1, q_2) < E_{thr}(q_1, q_2)$, где $E_{thr}(q_1, q_2) := \inf \sigma_{ess} H(q_1, q_2)$. набросок типичной диаграммы стабильности³⁶ изображен на Рис. 2. Кривая стабильности может быть оценена с помощью классической механики [A2]. Отметим ее основные свойства. В квадрате $\{q_{1,2} | 0 < q_{1,2} < 1\}$ система всегда стабильна (из-за дальнедействующего притяжения между связанной парой и третьей частицей). Линия, отвечающая равным вырожденному порогу диссоциации определяется как $\mu_{23}q_2^2 = \mu_{13}q_1^2$. Эта линия делит плоскость на верхний и нижний сектора: верхний сектор отвечает распаду $\{123\} \rightarrow \{23\} + 1$, а нижний сектор распаду $\{123\} \rightarrow \{13\} + 2$.

В диссертации доказывается следующая теорема

³⁶ A. Martin, J.-M. Richard and T. T. Wu// Phys. Rev. **A52**, (1995) 2557

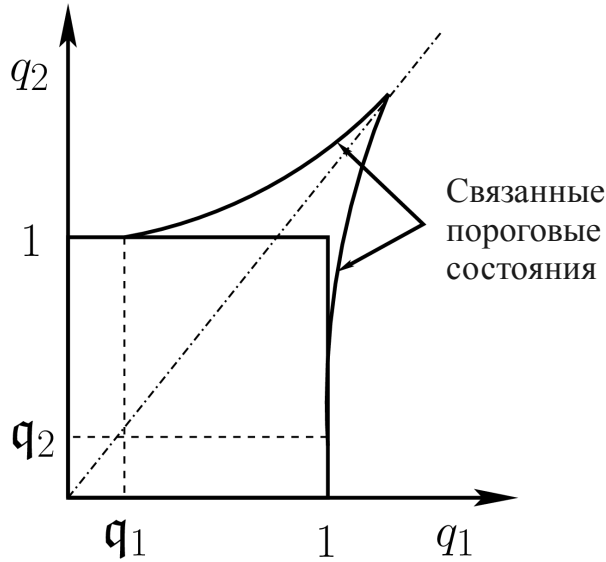


Рис. 2. Примерный вид диаграммы стабильности для трех заряженных частиц с зарядами $\{q_1, q_2, -1\}$. Точки на штрих-пунктирной линии соответствуют системам, у которых вырожден порог диссоциации. Область, находящаяся в пределах квадрата и двух сомкнутых арок отвечает стабильным системам. На тех частях арок, где либо $q_1 > 1$ либо $q_2 > 1$ присутствуют связанные пороговые состояния.

Теорема 6. Пусть $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ находятся на границе стабильности в верхнем (соотв. в нижнем) секторе (а) Если $\mathbf{q}_2 > 1$ (соотв. $\mathbf{q}_1 > 1$) тогда $H(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ имеет связанное состояние с энергией равной границе сплошного спектра. (b) Если $\mathbf{q}_1 < \mathbf{q}_1$ (соотв. $\mathbf{q}_2 < \mathbf{q}_2$) тогда $H(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ не имеет связанных состояний, лежащих на границе сплошного спектра.

Отрицательные ионы атомов рассматриваются в §4.8.2. Рассмотрим Гамильтониан атомного ядра с зарядом Z и N_e электронов

$$H(Z, N_e) = H_0 - \sum_{i=1}^{N_e} \frac{Z}{|r_i|} + \sum_{1 \leq i < j \leq N_e} \frac{1}{|r_i - r_j|} \quad (9)$$

$$H_0 = - \sum_{i=1}^{N_e} \Delta_i - \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i < j \leq N_e} \nabla_i \cdot \nabla_j, \quad (10)$$

где координата r_i направлена от ядра к электрону i . Полное число частиц

$N_e + 1$ (электроны пронумерованы от 1 до N_e , а ядро является частицей с номером $N_e + 1$). Положим $\hbar = 1$, $m_i = 1$, $m_{N_e+1} = M$. $q_i(Z) = -1$ для $i = 1, \dots, N_e$ и $q_{N_e+1} = Z$. Оператор проекции \mathcal{P}_{N_e} отображает волновые функции на пространство с правильной перестановочной симметрией, учитывая что электроны являются фермионами со спином $1/2$. Положим $E(Z, N_e) := \inf \sigma H(Z, N_e) \mathcal{P}_{N_e}$. Заряд ядра Z_{cr} называется *критическим*, если $E(Z_{cr}, N_e) = E(Z_{cr}, N_e - 1)$ и $E(Z, N_e) < E(Z, N_e - 1)$ для $Z > Z_{cr}$. Известно, что $Z_{cr} \leq N_e - 1$. Здесь мы докажем следующую теорему.

Теорема 7. *Предположим, что $Z_{cr} \in (N_e - 2, N_e - 1)$. Тогда существует $\psi_0 \in D(H_0)$, $\|\psi_0\| = 1$ такое, что $H(Z_{cr}, N_e)\psi_0 = E(Z_{cr}, N_e - 1)\psi_0$ и $\mathcal{P}_{N_e}\psi_0 = \psi_0$.*

§4.9 содержит вспомогательный материал, где обсуждаются критерии для нерастаекающихся последовательностей.

В пятой главе анализируется эффект Ефимова для N частиц. Эффект Ефимова был впервые строго доказан в²⁶. В статье³⁷ автор утверждает, что обобщил результаты, полученные в²⁶, на случай трех кластеров, но доказательство в³⁷ содержит серьезную ошибку [A6].

В серии работ С. М. Вугальтер и Г. М. Жислин, пользуясь вариационным подходом, доказали несколько теорем, касающихся конечности дискретного спектра. В применении к системам, имеющим подсистемы с виртуальными уровнями, их результаты остаются лучшими и по сей день. В частности, в работе³⁸ Вугальтер и Жислин, доказали следующую теорему (Теорема 1.3). Предположим, что система, состоящая из N частиц описывается Гамильтонианом H , у которого $\sigma_{ess}(H) = [0, \infty)$. Предположим также, что все частицы могут быть разбиты на две группы C_1 и C_2 таким образом, что любая подсистема, имеющая частицы как из C_1 так и из C_2 не имеет виртуального уровня

³⁷ X. P. Wang // J. Funct. Anal. **209** 137 (2004)

³⁸ S. A. Vugal'ter, G. M. Zhislin, Trans. Moscow Math. Soc. **49**, 97 (1987)

с нулевой энергией. Тогда H обладает конечным числом связанных состояний. Заметим при этом, что подсистемы, содержащие частицы только из C_1 (или только из C_2) могут иметь виртуальные уровни! Данный результат уже был доказан Яфаевым для $N = 3$, как сопутствующий главному результату статьи; а именно в²⁶ показывалось, что если в системе трех частиц максимум одна пара частиц имеет резонанс при нулевой энергии, тогда существует лишь конечное число связанных состояний. Таким образом, теорема Вугальтера–Жислина может рассматриваться в этом контексте как обобщение результатов Яфаева, касающихся конечности дискретного спектра, на случай $N \geq 4$. Доказательство Теоремы 1.3 в³⁸ очень сложное. Попытка в работе³⁹ его упростить не помогает, поскольку метод тот же самый, а основные вариационные леммы цитируются без доказательства. В §5.2 дается относительно простое доказательство теоремы, из которой следует результат Вугальтера и Жислина. В доказательстве используется многочастичный принцип Бирмана–Швингера, подробно рассматриваемый в §5.1.

Амадо и Гринвуд в работе³² утверждали, что доказали невозможность эффекта Ефимова для $N \geq 4$ бозонов. Предположение Амадо–Гринвуда, являющимся главным для физических приложений, не покрывается результатами Вугальтера и Жислина. Здесь можно отметить два сорта возникающих трудностей. Во-первых, существовал недостаток понимания поведения трех-частичной резольвенты возле порога при $N \geq 3$. Во-вторых, трудности возникают при попытке обобщить доказательство в на случай $N \geq 4$. А именно, в²⁶ собственные числа “считались” с использованием симметризованных уравнений Фаддеева, которые, как известно, обладают Фредгольмовским (компактным) ядром вдали от резонансов. В случае $N \geq 4$ уравнения Фаддеева перестают быть фредгольмовыми, что является известной проблемой. Существует обобщение фаддевских уравнений в виде уравнений

³⁹ F. Ahia// J. Math. Phys. **33**, 189 (1992)

Фаддеева–Якубовского, но совершенно непонятно, как можно применить эти уравнения для подсчета собственных значений.

В доказательстве предположения Амадо–Гринвуда, представляемом в данной работе, общая идея схожа с работой²⁶. Производится анализ спектра интегрального оператора, записываемого в форме 3×3 матрицы, который возникает из Фаддеевских уравнений. В нашем случае мы сводим задачу к анализу спектра интегрального оператора, который возникает после применения N раз (по числу частиц) принципа Бирмана–Швингера. Данный принцип является незаменимым инструментом в задачах, где ведется подсчет собственных чисел Гамильтонианов. Форма принципа Бирмана–Швингера, используемая в данной работе, является нестандартной. Возникающее при этом уравнение записывается в одну строчку. Данное уравнение используется для подсчета собственных чисел. Следует также подчеркнуть основное различие между трех и четырехчастичным случаем. В случае $N = 3$ двухчастичные подсистемы могут обладать лишь резонансом при нулевой энергии, но никак не связанным L^2 состоянием. В случае же $N = 4$, наоборот, критически связанные трехчастичные подсистемы, как правило, обладают связанным состоянием с нулевой энергией. Эти состояния спадают вместе с гиперрадиусом по степенному закону. Связанное пороговое состояние оказывает влияние на поведение энергии в зависимости от константы связи вблизи порога.

Гамильтониан N частиц в \mathbb{R}^3 имеет вид

$$H = H_0 + V \tag{11}$$

$$V = \sum_{i < k} v_{ik}, \tag{12}$$

где H_0 оператор кинетической энергии, не включающий движение центра масс. Вектора положений частиц и массы, как обычно обозначаются $r_i \in \mathbb{R}^3$ и m_i . Суммы парных взаимодействий подсистем, содержащих соответственно

$N - 1$ и $N - 2$ частиц обозначим как

$$V_j := \sum_{\substack{1 \leq i < k \leq N \\ i, k \neq j}} v_{ik} \quad (13)$$

$$V_{j;s} := \sum_{\substack{1 \leq i < k \leq N \\ i, k \neq j \\ i, k \neq s}} v_{ik}, \quad (14)$$

где $j, s = 1, \dots, N$. В Ур. (13) мы суммируем парные взаимодействия в подсистеме, где частица с номером j отсутствует. В Ур. (14) мы суммируем парные взаимодействия в подсистеме, где отсутствуют частицы с номерами j и s . Удобно разбить взаимодействия V_j и $V_{j;s}$ на две части $V_j = (V_j)^+ - (V_j)^-$ и $V_{j;s} = (V_{j;s})^+ - (V_{j;s})^-$, где

$$(V_j)^\pm := \sum_{\substack{1 \leq i < k \leq N \\ i, k \neq j}} (v_{ik})_\pm \quad (15)$$

$$(V_{j;s})^\pm := \sum_{\substack{1 \leq i < k \leq N \\ i, k \neq j \\ i, k \neq s}} (v_{ik})_\pm, \quad (16)$$

На Гамильтониан мы будем накладывать следующие условия

- Парные взаимодействия удовлетворяют условию $|v_{ij}| \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)$
- $\sigma_{ess}(H) = [0, \infty)$. Также существует $\omega > 0$, так что $H_0 + (V_{j;s})^+ - (1 + \omega)(V_{j;s})^- \geq 0$ для всех $1 \leq j < s \leq N$.

Второе требование в частности означает, что подсистема, состоящая из $N - 2$ частиц не является критически связанной. Отсюда немедленно следует, что все подсистемы имеющие $N - 2$ или меньшее число частиц не имеют критической константы связи.

Теорема 8. Пусть H удовлетворяет наложенным требованиям и $N \geq 4$. Тогда число связанных состояний H с энергией меньше нуля конечно.

Доказательство Теоремы 8 будет вестись следующим образом. Основной инструмент нашего анализа это оператор Бирмана–Швингера (БШ). Еще раз отметим, что выбранная нестандартная форма данного оператора играет важную роль в установлении связки между БШ–операторами системы и ее подсистем. Далее исследуются спектральные свойства БШ–оператора для системы N частиц, имеющей критическую константу связи, и где ни одна из подсистем не имеет критической константы связи. Согласно Теореме 2 такая система обладает связанным состоянием с нулевой энергией (и соотв. квадратично интегрируемой волновой функцией). Главным объектом исследования в этом разделе является собственная функция БШ-оператора, соответствующая наибольшему собственному значению. БШ–оператор, отвечающий Ур. (11)–(12) определяется следующим образом

$$K(\epsilon) := (H_0 + \epsilon)^{-1/2} V (H_0 + \epsilon)^{-1/2} \quad (\epsilon > 0). \quad (17)$$

Далее анализируется спектр БШ–оператора в случае, когда H , определенный в (11)–(12) имеет критическую константу связи. Данные результаты используются при доказательстве основной теоремы, которое проводится в §5.5.

В Заключении подводятся итоги работы автора, определяется их теоретическое и практическое значение.

Список публикаций автора по теме диссертации

- A1. *Sufficient Condition For Stability of N-Body System with Attractive Pair Potentials*, D.K. Gridnev, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **A 36**, 6725 (2003)
- A2. *Classical Decay of Coulomb Charges*, D.K. Gridnev and J.S. Vaagen, Physical Review **E 63**, 26609 (2000)

- A3. *Necessary Conditions for Binding in Few-Body Systems*, D. K. Gridnev and J. S. Vaagen, Physical Review C **61**, 054304 (2000)
- A4. *Stability of Three Unit Charges. Necessary Conditions*, D.K. Gridnev, C. Greiner and W. Greiner, J. Math. Phys. **46**, 052104 (2005), arXiv math-ph/0502022
- A5. *Zero Energy Bound States and Resonances in Three-Particle Systems* , D. K. Gridnev, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **45** 175203 (2012); arXiv:1111.6788v2
- A6. *Comment on the article “On the Existence of the N-Body Efimov Effect” by X. P. Wang*, D. K. Gridnev, Journal of Functional Analysis **263**, 1485-1486 (2012)
- A7. *Rigorous Conditions for the Existence of Bound States at the Threshold in the Two- Particle Case* , D. K. Gridnev and M. Garcia, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **A 40** (2007) 9016
- A8. *Proof that the Hydrogen-Antihydrogen Molecule is Unstable* , D.K. Gridnev and C. Greiner, Physical Review Letters **94**, 223402 (2005)
- A9. *Особенности Границы Стабильности Легких Ядер*, Гриднев К. А., Гриднев Д. К., Митрошин В. Г., Тарасов В. Н., Тарасов Д. В., Грайнер В., Картавенко В. Г. Ядерная физика. 2005. Т. **68**. № 7. С. 1311
- A10. *Особенности Границы Стабильности Легких Ядер*, Гриднев К.А., Гриднев Д.К., Картавенко В.Г., Митрошин В.Е., Тарасов В.Н., Тарасов Д.В., Грайнер В., Ядерная физика. 2006. Т. 69. № 1. С. 3
- A11. *Нейтрондефицитные и Нейтроноизбыточные Изотопы Fe и Ni Вблизи Границы Стабильности*, Тарасов В.Н., Тарасов Д.В., Гриднев К.А.,

Гриднев Д.К., Картавенко В.Г., Грайнер В., Митрошин В.Е., Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2007. Т. 71. № 6. С. 773-780

A12. *Свойства Изотопов Zr у Границы Нейтронной Стабильности и за ее Пределами*, Тарасов В.Н., Тарасов Д.В., Гриднев К.А., Гриднев Д.К., Грайнер В., Картавенко В.Г., Куприков В.И., Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2008. Т. 72. № 6. С. 890-895.

A13. *Свойства Изотопов Pb в Окрестности Границы Нейтронной Стабильности*, Тарасов В.Н., Тарасов Д.В., Гриднев К.А., Гриднев Д.К., Грайнер В., Картавенко В.Г., Пилипенко В.В. Ядерная физика. 2008. Т. 71. № 7. С. 1283-1289.

A14. *Model Of Binding Alpha-Particles and Applications to Superheavy Elements*, Gridnev K.A., Torilov S.Yu., Gridnev D.K., Greiner W., Kartavenko V.G., International Journal of Modern Physics **E 14** С. 635-643. (2005)

A15. *Stability Island Near The Neutron-Rich 40-O Isotope*, Gridnev K.A., Gridnev D.K., Kartavenko V.G., Greiner W., Mitroshin V.E., Tarasov V.N., Tarasov D.V. The European Physical Journal **A 25** - Hadrons and Nuclei. 2005. № SUPPL. 1. С. 353-354

A16. *On Stability of The Neutron-Rich Oxygen Isotopes*, Gridnev K.A., Kartavenko V.G., Greiner W., Gridnev D.K., Mitroshin V.E., Tarasov V.N., Tarasov D.V. International Journal of Modern Physics **E 15** 2006. С. 673-683.

A17. *Neutron-Deficient and Neutron-Rich Fe and Ni Isotopes near the Drip Line*, Тарасов В.Н., Тарасов Д.В., Гриднев К.А., Картавенко В.Г., Грайнер В., Гриднев Д.К., Митрошин В.Е, Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая, 2007, Том 71, # 6, стр. 774–780

- A18. *Properties of Fe, Ni And Zn Isotopes near the Drip-Lines*, Tarasov V.N., Tarasov D.V., Gridnev K.A., Kartavenko V.G., Greiner W., Gridnev D.K. International Journal of Modern Physics **E 17**, 1273-1291 (2008)
- A19. *Theoretical Prediction of Extremely Neutron Rich Zr and Pb*, Gridnev K.A., Gridnev D.K., Greiner W., Tarasov V.N., Tarasov D.V., Pilipenko V.V., International Journal of Modern Physics **E 19** C. 449-457 (2010)
- A20. *Исследование Нейтронной Стабильности Нейтронно-Избыточных Изотопов O, Ar, Kr, Rn*, Тарасов В.Н., Гриднев К.А., Гриднев Д.К., Куприков В.И., Тарасов Д.В., Грайнер В., Виньяс К. Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2010. Т. 74. № 11. С. 1624-1634
- A21. *Полуострова Нейтронной Стабильности Ядер в Окрестности Нейтронных Магических Чисел*, Тарасов В.Н., Гриднев К.А., Грайнер В., Гриднев Д.К., Куприков В.И., Тарасов Д.В., Виньяс К. Ядерная физика. 2012. Т. 75. № 1. С. 19
- A22. *The Quest for the Heaviest Uranium Isotope*, S. Schramm, D. Gridnev, D. V. Tarasov, V. N. Tarasov, Walter Greiner, International Journal of Modern Physics **E 21**, (2012) 1250047
- A23. *Borromean Halo Nuclei*, Vaagen J.S., Gridnev D.K., Heiberg-Andersen H., Danilin B.V., Ershov S.N., Zagrebaev V.I., Thompson I.J., Zhukov M.V., Bang J.M., Physica Scripta **T 88** C. 209-213 (2000)
- A24. *Bound States at Threshold Resulting from Coulomb Repulsion*, D. K. Gridnev, Journal of Mathematical Physics 53, (2012) C. 102108-1–102108-16 (2012)
- A25. *Zero Energy Bound States in Many-Particle Systems*, D. K. Gridnev, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **45** 395302 (2012)

A26. *Universal Angular Probability Distribution of Three Particles near Zero Energy Threshold*, D. K. Gridnev, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46** 115204 (2013)

A27. *Why there is no Efimov effect for four bosons and related results on the finiteness of the discrete spectrum*, D. K. Gridnev, Journal of Mathematical Physics **54** C. 042105-1–042105-41 (2012)